特殊解からの可積分系の構成 : 1つの試み(D加群と非線型可積分系)

中屋敷, 厚

数理解析研究所講究録
640巻 1988年 72-85

特殊解からの可積分系の構成 — 1つの試み —

京大数理研　中屋敷 厚（Atsushi Nakayashiki）

大山、鈴木両氏により述べられている、我々が構成した高次元の可積分系は、self-dual-Yang-Mills方程式系（略してSDYM）を含むので、もちろんSDYMの様々な特殊解、例えば、instanton解などを含むのであるが、それを、1次元のKP系のように、UGMの、ある群の作用による、不変部分多様体として特殊化するというような、システマティックなやり方で、構成することには、ほとんど成功していない。わずかに、soliton解のみKP系と類似の仕方で構成されているが、これは研究会の時話したように、きわめて1次元的な解で、これから本質的に高次元的な特殊解（別にきちっとした定義があるわけではないが）構成への糸口をつかむことはむずかしいと思われる。特殊解構成の困難は、主に変換群がきっちりと構成できていないことによるもので、その問題点については、高崎氏の論説に書かれるものと思われる。このように我々の構成した可積分系は、特殊解についてみると、

不満足・不完全である。では、例えば1つの問題として、高次元的な特殊解を必ず持つような可積分系を定義しもとめよ、ということを考えたとき、どうすればよいであろうか。ここではその1つの試みとして、特殊解――と言っても我々は例えば高次元のアーベル関数などを念頭においているのであるが――を与えて、それを解とするような非線型の微分方程式系を構成することにする。

§1. KP系の準周期解

状況設定はKP系の場合の自然な拡張なので、まず1次元の場合を復習しておくことにする。

定義　次の条件をみたす関数ψをBaker-Akhiezer関数という。

$$
\begin{cases}
C：\text{種数 } g \text{ のコンパクト・リーマン面} \\
C \ni P_\infty \qquad z：P_\infty \text{ のまわりの local parameter s.t } z(P_\infty)=0 \\
D = P_1 + \cdots + P_g：\deg g \text{ の一般因子} \\
\psi：C \setminus P_\infty \text{ で meromorphic} \qquad (\psi)_\infty = \psi \text{ の pole divisor} = D. \\
\psi(z)\, e^{-\sum \frac{t_n}{z^n}} = 1 + O(z) \quad ：P_\infty \text{ のまわりで正則}
\end{cases}
$$

Baker-Akhiezer関数は、上の前半の4つのdataに対して、uniqueに存在し、次のように、$Jac(C)$ (= CのJacobian) のテータ関数を使って書くことができる。

$\alpha_1, \cdots, \alpha_g$, $\beta_1, \cdots, \beta_g$ を $H_1(C, \mathbb{Z})$ の canonical basis とする。

i.e. $\alpha_i \cdot \alpha_j = \beta_i \cdot \beta_j = 0$, $\alpha_i \cdot \beta_j = \delta_{ij}$ （・は交点数をあらわす）

$H^0(C,\Omega^1)$ の basis $\omega_1,\cdots,\omega_g$ を $\left(\int_{\alpha_i}\omega_j,\ \int_{\beta_k}\omega_l\right)=(1\ \ \Omega)$ $\Omega\in\mathcal{H}_g$

($\mathcal{H}_g$：ジーゲル上半空間) となるようにとる。

$A : C \longrightarrow Jac(C)$ ：アーベル写像

η_n： P_∞で $\sim d(z^{-n})+O(1)$ となる第２種微分

このとき

$$\psi(P)=\frac{\theta\left(A(P)-\sum_{n=1}^{\infty}U_n t_n - A(D)+K\right)\theta\left(A(P_\infty)+K-A(D)\right)}{\theta\left(A(P)+K-A(D)\right)\theta\left(A(P_\infty)-\sum_{n=1}^{\infty}U_n t_n - A(D)+K\right)}\, e^{\sum_{n=1}^{\infty} t_n\int^P\eta_n}$$

ここで

$$2\pi\sqrt{-1}\,U_i=\left(\int_{\beta_i}\eta_1,\cdots,\int_{\beta_i}\eta_g\right)\qquad 1\le i\le g.$$

<u>remark</u> $\int_{B_j}\eta_k=-2\pi i\,\frac{1}{(k-1)!}\,\frac{d^{k-1}w_j}{dz^{k-1}}\Big|_{z=0}$ $\quad w_j(P)=\int_{P_0}^{P}\omega_j$ なる式を使うと (田中・伊達 参照) $\{U_i\}$を，$\omega_1,\cdots,\omega_g$たちの$z=0$における展開係数を使って表わすことができる。

Baker-Akhiezer関数とUGMのframeとの対応は次で与えられる。

P_∞のまわりで

$$\psi(z,t)=W(z,t)\,e^{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t_n}{z^n}}$$ と展開

$\downarrow$

$\mathcal{J}=\mathcal{D}\,W(\partial_x^{-1},t)$ 　　ここで $\mathcal{D}=C[[t_1,t_2\cdots]][\partial_x]$ ，$t_1=x$，

$\downarrow$

$V=W^{-1}V_\phi.$ 　　 $V_\phi=\left(\begin{array}{ccc|}\ddots & & \\ & 1 & \\ & & 1 \\ & & 1 \\ \hline & 0 & \end{array}\right)$ というUGMの点

$\mathcal{J}$もVも$\mathcal{D}$－加群であるが，これらとは異なる$\mathcal{D}$－加群を.

$$L := \mathcal{D}\psi$$

として定義することができる。Lと$\mathcal{J}$とは似ていると思うかもしれないが、$\mathcal{J}$は$\mathcal{E}\ (= \mathbb{C}[[t_1, \cdots]]((\partial^{-1})))$の$\mathcal{D}$-部分加群で、($\mathcal{J}$のことを$\mathcal{D}$-イデアルと、整数論における分数イデアルとの類推で言うこともあるが)あるので、これは微分方程式をあらわしていると思えるが、Lの方は、ψが具体的な関数ゆえ、何らかの解空間をあらわしていると思える。Lから$\mathcal{J}$を作るprocessは上のようなものであるが、Lはそれ自身として重要な$\mathcal{D}$-加群であると思われるので、それをintrinsicにとらえておくことは重要であると思われる。実は、以下に示すように、LはVのある種のpolar空間と思える。

<u>定義</u> $\mathbb{V} := \mathcal{E}_{const} = \mathbb{C}((\partial^{-1}))$

$\mathbb{V} \ni P = \sum a_n \partial^n$ をタテベクトルで $P = \begin{pmatrix} \vdots \\ a_{-1} \\ a_0 \\ a_{+1} \\ \vdots \end{pmatrix}$ と書くことにする

$$\mathbb{V} \times \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{C} \qquad \text{bilinear.}$$

$$\left(v = \begin{pmatrix} \vdots \\ v_{-1} \\ v_0 \\ v_{+1} \\ \vdots \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} \vdots \\ w_{-1} \\ w_0 \\ w_{+1} \\ \vdots \end{pmatrix} \right) \longmapsto {}^t v \begin{pmatrix} & & & & \iddots \\ & & & 1 & \\ & & 1 & & \\ & 1 & & & \\ \iddots & & & & \end{pmatrix} w = \sum_{i=0}^{\infty} v_i w_{-i-1} + \sum_{i=0}^{\infty} w_i v_{-i-1}$$

$(= \langle v, w \rangle$ と書く$)$

$V^{\circ} := \{ v \in \mathbb{V} \mid \langle v, w \rangle = 0 \text{ for } {}^{\forall} w \in V \}$: Vのpolar, $V^{\circ\circ} = V$

今、$\mathcal{J}_{t=0} = \mathcal{D} W_0$. $W_0 = 1 + \sum_{j<0} w_{0j} \partial^j$ $\qquad W_i := \partial^i + \sum_{j<0} w_{ij} \partial^j \in \mathcal{J}$

と展開したとき、$\mathcal{J}$に対応するframeとそのpolarは、それぞれ下のようになる。

$$V=\begin{array}{ccc|}\ddots & & \\ & 1 & \\ & & 1 \\ \hline \cdots & -w_{0/-2} & -w_{0/-1} \\ & \cdot & -w_{1/-1} \\ \cdot & & \vdots \end{array}\qquad V^{\circ}=\begin{array}{ccc|c} \ddots & & & \vdots \\ & 1 & & z^{-1} \\ & & 1 & 1 \\ \hline \cdots & w_{1/-1} & w_{0/-1} & z \\ & \cdot & w_{0/-2} & z^2 \\ & \cdot & w_{0/-3} & \vdots \end{array}$$

$\sigma^{-1}\leftrightarrow z$ なる対応により V° の各ベクトルから $\mathbb{C}((z))$ の元をつくるとLの元になる。例えば V° の第一列から作った

$$\psi(z,0)=1+\sum_{j<0} w_{0/j}z^{-j}$$

は、$t=0$ における Baker−Akhiezer関数である。又、V° の各basisからこのようにして得られるLの元たちがLの $\mathbb{C}$ 上のbasisになることも簡単に分かる。従って

$$L\simeq V^{\circ}$$

ところで $\quad 0\longrightarrow V\longrightarrow \mathbb{V}\longrightarrow \mathbb{V}/V\longrightarrow 0\quad$ のdualをとって

$$0\longleftarrow V^{*}\longleftarrow \mathbb{V}^{*}\longleftarrow \underset{V^{\circ}}{\underset{\wr\wr}{(\mathbb{V}/V)^{*}}}\longleftarrow 0$$

ゆえ、V° は、dualグラスマン多様体のframeをあらわしている。

ところで、Baker−Akhiezer関数を上では、リーマン面C上の関数としたが、これをある種のline bundleのsectionにまで定義を拡張することができる。

例 C：楕円曲線　　　σ：Weierstrassのシグマ関数

Baker関数 ψ

$$\psi(z)=\frac{-\sigma(a)\sigma(z-a-t_1)}{\sigma(z-a)\sigma(-a-t_1)}e^{t_1\zeta(z)+t_2\wp(z)-\frac{t_3}{2!}\wp'(z)+\cdots}$$

ここで $\zeta(z)=\frac{d}{dz}\log\sigma(z)\qquad \wp(z)=-\frac{d}{dz}\zeta(z)$

拡張された Baker 関数 φ

$$\varphi = \frac{-\sigma(a)\,\sigma(z-a+c-t_1)}{\sigma(z-a)\,\sigma(-a+c-t_1)}\, e^{t_1\zeta(z)+t_2\wp(z)-\frac{t_3}{2!}\wp'(z)+\cdots} \qquad c\in\mathbb{C}$$

φ は C 上の deg=0 の line bundle の section である。φ から作った W(あるいは V)も KP 系の解(すなわち準周期解)を与える。

従って Baker 関数とは、ある種の essential singularity をもった、その他の点では meromorphic な、C 上の line bundle の global section だということができる。この Baker 関数から作られる L は、次のように特徴づけることができる。

$L=\{\psi : {}^\exists$テータ関数 θ, ${}^\exists c\in\mathbb{C}^g$ について $\frac{\theta(A(P)+c)}{\theta(A(P))}$ を global section とするような C 上の line bundle の section s.t. $P_\infty\in C$, $D=P_1+\cdots+P_g$ 一般因子, $C\setminus P_\infty$ で meromorphic, pole divisor $(\psi)_\infty=D$, z: P_∞ のまわりの local parameter s.t. $z(P_\infty)=0$, ${}^\exists m$, $z^m e^{-\sum\frac{t_n}{z^n}}$: P_∞ の近傍で正則$\}$

このLが、前に定義したLと一致すること、つまりある1コの Baker 関数 ψ_0 を使って $L=\mathcal{D}\psi_0$ と書けることは、リーマン・ロッホの定理の簡単な帰結である。

さて、$t_n=0$ for $n=1,2,\cdots$ という初期値に対応する L を考えると、これは $D+mP_\infty$ $m=0,1,2,\cdots$ という pole divisor をもつ line bundle の meromorphic section 全体をあらわしている。よ

って特に line bundle それ自身と同一視することができる。従って、

$A = \mathcal{O}(C \backslash P_\infty) = \{$高々$P_\infty$でのみ pole をもつような meromorphic 関数全体$\}$

とおくと、

L : rank 1 の射影的 A-加群

と言ってよい。$L = V^0$ であったが、V^0 は双対グラスマン多様体 $GM(V^*)$ の frame であるから、結局 KP 系の準周期解をあらわす。$GM(V^*)$ の点は、代数曲線の affine 環 A として、射影的 A-加群であるということができる。

§2 準周期解の高次元への拡張

KP系の準周期解を上のように定式化すると、次元が2以上の代数多様体上の line bundle を考えて、上と同じような理論を作ることができないかという考えに導かれる。我々は、X がアーベル多様体のときに、L を explicit に構成し、$\dim X = 2$ のときに、L の構造を調べた。X がそのアルバネーゼ多様体 $\mathrm{Alb}(X)$ へ埋め込まれる場合にも本質的には同じで、Manin[1] に述べられている。以下、X が2次元アーベル多様体の場合について述べることにする。

X : 2次元アーベル多様体、

$\Theta = (\theta)$ ：テータ divisor.

$D = (\theta(z-a))$ $\quad a \in \mathbb{C}^g \qquad c \in \mathbb{C}^g$

このとき

$L := \{\psi : \frac{\theta(z+c)}{\theta(z)}$ を global section とするような X 上の line bundle の global section, s.t. $X \backslash \Theta$ で meromorphic, $\psi(z) e^{-\zeta_0(z) x_0 - \zeta_1(z) x_1} =: f(z)$ 正則 near $\Theta \backslash \theta(z-a)$，pole divisor $(\psi)_\infty = D\}$ ここで $\zeta_i = \frac{\partial}{\partial z_i} \log \theta$.

・一次元の時とは違って，今度は L は $\mathcal{D} = \mathbb{C}[[x_0, x_1]][\partial_0, \partial_1]$ 上単項生成ではない。L の $\mathcal{D}$-加群としての構造は，テータ関数の加法定理から出る。すなわち

<u>Prop 0</u> $\quad L = \sum_{n \in N} \sum_{a \in \mathbb{Z}^2/(n+1)\mathbb{Z}^2} \mathbb{C} \psi_{n,a}$.

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \psi_{n,a} = - \sum_{b \in \mathbb{Z}^2/(n+2)\mathbb{Z}^2} \frac{1}{n+1} \frac{\partial}{\partial z_j} f_{(n+1)(n+2), a+(n+1)b}\left(-\frac{x+\alpha-c}{(n+1)(n+2)}\right) \psi_{n+1, a+(n+1)b}.$$

ここで

$$\psi_{n,a}(z, x, \alpha, c) = \frac{f_{n+1,a}\left(z - \frac{x+\alpha-c}{n+1}\right)}{\theta(z)^n \, \theta(z-\alpha)} e^{\zeta_0(z) x_0 + \zeta_1(z) x_1}$$

$$f_{n,a}(z) := \theta\begin{bmatrix} \frac{a}{n} \\ 0 \end{bmatrix}(nz, n\Omega)$$

θ：リーマンのテータ関数 i.e. $\theta(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^2} e^{\pi i {}^t m \Omega m + 2\pi i {}^t m z}$

証明は，次の加法定理（c.f Mumford[1]）

$$f_{n+1,a}\left(z - \frac{y+\alpha-x}{n+1}\right) \theta(z-x) = \sum_{b \in \mathbb{Z}^2/(n+2)\mathbb{Z}^2} f_{(n+1)(n+2), a+(n+1)b}\left(\frac{x}{n+1} - \frac{y+\alpha}{(n+1)(n+2)}\right) f_{n+1, a+(n+1)b}\left(z - \frac{y+\alpha}{n+1}\right)$$

を x_j で微分すればよい。$\mathbb{C}$ 上の生成元の求め方についてはやはり Mumford[1] を参照。

ところで、$\{\psi_{n,a}\}$ はLをC上生成するがbasisではない。Lとグラスマン多様体の点（あるいは双対グラスマン多様体の点）つまり、frame (or dual frame) とを対応させようとした場合、やはりC上、$\mathcal{D}$上のbasisをきちっと求めておく必要がある。これについては次のことが成り立つ。

<u>Prop.1</u> $\mathbb{C}[[x_0, x_1]]\otimes_{\mathbb{C}} L$ は、$\mathbb{C}[[x_0, x_1]]$上1次独立な2個の元で$\mathcal{D}$上生成される。

i.e. $L = \mathcal{D}\psi_0 \oplus \mathcal{D}\psi_1 \qquad \exists\psi_0, \psi_1 \in L$.

ここでψ_0, ψ_1として、

$\psi_0 = \psi_{00}$ $\quad \psi_1 : \psi_{1,a}$ の中から選べる。

証明は、テータ関数のΘ上の点におけるTaylor展開と、リーマン・ロッホの定理とによるが、くわしいことは省略する。

又

$A = \mathcal{O}(X\setminus\Theta) = \{\Theta$にのみpoleをもつX上のmeromorphic関数$\}$

とおくと、Lは、射影的A－加群であるが、

$$\mathcal{D}_A := A\otimes_{\mathbb{C}}\mathcal{D}$$

と係数拡大すると、

<u>Prop.2</u> Lはsimple $\mathcal{D}_A$－加群である。

i.e. $L = \mathcal{D}_A\psi_0$

我々は、Lを双対グラスマン多様体のframeとして理解したいのであるが、frameの大きさをどのように設定するかが問題となる。これについても、いくらか分かっているが、最終的な形にまとめられていないので省略する。

次に、Lと$\mathcal{O}$-イデアル$\mathcal{J}$との対応を述べ、発展方程式を導くことにする。

$$\frac{\theta_{z_0}}{\theta} - a_0 = w_0^{-1} \qquad \frac{\theta_{z_1}}{\theta_{z_0}} - a_1 = w_1$$

と、$(z_0, z_1) \to (w_0, w_1)$なる座標変換を$(w_0, w_1) = (0, 0)$のまわりで行う。ここで、$a_0, a_1$は、$J\left(\left(\frac{\theta_{z_0}}{\theta} - a_0\right)^{-1}, \frac{\theta_{z_1}}{\theta_{z_0}} - a_1\right)$が退化した点をさけるように適当にとる。ただし$(z_0, z_1) \in \theta$

このとき

$$\zeta_0 = \frac{\partial}{\partial z_0} \log \theta = \frac{\theta_{z_0}}{\theta} = w_0^{-1} + a_0$$

$$\zeta_1 = \frac{\partial}{\partial z_1} \log \theta = \frac{\theta_{z_1}}{\theta} = \frac{\theta_{z_0}}{\theta} \cdot \frac{\theta_{z_1}}{\theta_{z_0}} = w_0^{-1}(w_1 + a_1) + a_0(w_1 + a_1)$$

であるから、$(w_0, w_1) = (0, 0)$のまわりで

$$\psi_i(w_0, w_1, x) = W_i(w_0, w_1, x) e^{\frac{x_0}{w_0} + \frac{x_1(w_1 + a_1)}{w_0}} \qquad i = 0, 1$$

と展開する。Prop. 1より

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial x_0} = B_{00}^{(i)} \psi_0 + B_{01}^{(i)} \psi_1 \qquad B_{k\ell}^{(i)} \in \mathcal{O} \qquad i, k, \ell = 0, 1$$

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial x_1} = B_{10}^{(i)} \psi_0 + B_{11}^{(i)} \psi_1$$

と書ける。W_iについて書き直すと

$$\partial_j W_i(\partial_0^{-1}, \partial_0^{-1}\partial_1 - a_1, x) = B_{j0}^{(i)} W_0(\partial_0^{-1}, \partial_0^{-1}\partial_1 - a_1, x) + B_{j1}^{(i)} W_1(\partial_0^{-1}, \partial_0^{-1}\partial_1 - a_1, x)$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\partial W_i}{\partial x_j} + W_i(\partial_0^{-1}, \partial_0^{-1}\partial_1 - a_1, x)\partial_j = \sum_{k=0,1} B_{jk}^{(i)} W_k(\partial_0^{-1}, \partial_0^{-1}\partial_1 - a_1, x) \qquad i, j = 0, 1$$

これは、$\{w_i\}$ たちの係数に対する非線型の微分方程式をあらわしている。なお、このとき

$$\mathcal{J} = \mathcal{O}w_0 + \mathcal{O}w_1$$

高次の時間発展をどうするかという問題が残っているが

$$u_{ij} := \partial_{z_0}^{i} \partial_{z_1}^{j} \log \theta \qquad i, j \in \mathbb{N} \quad i+j \geq 1.$$

と定義すると、$i+j \geq 2$ ならば u_{ij} はアーベル関数になるので、

$$\varphi_{n,a} := \frac{f_{n+1,a}\left(z - \frac{x+\alpha-c}{n+1}\right)}{\theta(z)^n \theta(z-\alpha)} e^{\zeta_0 x_0 + \zeta_1 x_1 + \sum_{i+j\geq 2} t_{ij} (-)^{i+j} \frac{u_{ij}}{(i+j)!}}$$

は、Lの section になる。(ここでは、Lと line bundle とを同一視して、混同して使っている。) 従って、u_{ij} を w_0, w_1 で展開したときの主要部に相当する時間発展が許されると思われるが、対応する frame を時間発展させたときに、発散などの困難などがおきないかなど、frame との対応をきっちりつけて調べなければならないので、今のところは、はっきりしたことを言うことはできない。又、変換群としてどんなものが許されるかをきっちり求めることもこれからの課題である。

最後に、高次の時間発展 t_{ij} を入れた場合の時間発展の方程式を W のレベルでは書くことができるので書いておく。

$u_{ij}(w_0, w_1)$ の singular part を P_{ij} とおく。ただし P_{ij} は定数項なしとする。i.e. $u_{ij}(w_0, w_1) = P_{ij}(w_0, w_1) + \text{regular}$.

特に $P_{10}=\frac{1}{w_0}$ $\quad P_{01}=\frac{w_1+a_1}{w_0}$

$$\psi_i = W_i(w_0, w_1, t)\, e^{\sum \frac{(-)^{i+j}}{(i+j)!} t_{ij} P_{ij}(w_0,w_1)} \qquad \text{near } (w_0,w_1)=(0,0)$$

と展開して、上と同様にして.

$$\frac{\partial W_i}{\partial t_{k\ell}} + W_i P_{k\ell}(\partial_0^{-1}, \partial_0^{-1}\partial_1 - a_1, t) = \sum_{m=0,1} B^{(i)}_{k\ell,m} W_m(\partial_0^{-1}, \partial_0^{-1}\partial_1 - a_1, t)$$

$$B^{(i)}_{k\ell,m} \in \mathcal{L} = \mathbb{C}[[t_{ij}]][\partial_0, \partial_1] \quad i=0,1 \quad (k,\ell)\in N\times N \quad k+\ell\geq 1.$$

§3 まとめ

KP系 or 上の準周期解は、代数曲線 or アーベル多様体上の line bundle の変形を記述しているということができる。簡単化して言うと、例えば楕円曲線上で $\frac{\sigma(z+c+x)}{\sigma(z)}$ というように parameter x で line bundle を変形し、変形を記述するために、何か1つの line bundle に section を (ある意味で) 引きもどして調べるのであるが、その引きもどしは $e^{-\zeta(z)x}$ によってなされている。つまり、$e^{-\zeta(z)x}$ がある意味で変形を記述していると言うことができる。指数関数で変形が記述できるのは、line bundle がテータ関数を使ってあらわされているからである。そこで、一般の代数多様体上の line bundle も、それが何らかの意味で変形できるならば、変形を微分方程式で記述できないかという問題を考えることができる。

又、上で最後に高次の時間発展を考えたが、これは準周期解のみを考えていたのでは意味がない。つまり t_{ij} $i+j\geq 2$ は

line bundleを変形していない。上で構成した準周期解を特殊解として含むような可積分系がちゃんとできたときに意味をもつものである。そのときのWの時間発展の方程式は、上で求めたものになるであろう。(と期待している。)
本文でもちょっと触れたが、変換群の話も、準周期解の範囲に限っても、きっちり調べておくことは重要で、準周期解全体が等質空間になるか、あるいは、例えば、KP系の場合のVirasoro代数に対応するようなものがあるか、などは非常に興味深いと思われる。

文献

D. Mumford [1] Tata Lectures on Theta I. Birkhäuser Boston Inc. 1983.

M.M. kaparanov and Yu.I. Manin [1], The twistor transformation and algebraic geometric constructions of solutions of the equations of field theory, Uspekhi Mat. Nauk 41:5 (1986) 85-87.
Russian Math. Surveys 41:5 (1986) 33-61.

T. Shiota : Characterization of Jacobian varieties in terms of soliton equations. Inv. math. 83 333-382 (1986)

M. Mulase : Cohomological structures in soliton equations and Jacobian varieties, J. Diff. Geomety 19 (1984) 403-430

M. Sato, Soliton equations as dynamical systems on an infinite dimensional Grassmann manifold, RIMS Kokyuroku 439 (1981) 30-46.

田中俊一・伊達悦朗 : KdV方程式 , 紀伊國屋書店 (1979)

Date.E, Jimbo.M, Kashiwara.M, Miwa.T, : Transformation groups for soliton equations. In : Proceedings RIMS Symp. Non-linear integrable systems-classical theory and quantum theory (Kyoto 1981) PP39-119 Singapore : World Scientific 1983